

(¹Институт математики и математического моделирования, МОН РК, Алматы, Республика Казахстан,

²Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Республика Казахстан)

ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОБЪЕМНОГО ПОТЕНЦИАЛА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРИКОМИ

Аннотация

В работе [1] найдены граничные условия объемного потенциала для уравнения Пуассона в любой ограниченной области Ω многомерного евклидова пространства. Граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения были получены в работе [2], а также было показано, что решение полученной граничной задачи совпадает с объемным потенциалом. В данной работе исследовано уравнение Трикоми в эллиптической области и получены аналогичные результаты: получены граничные условия объемного потенциала для уравнения в эллиптической области. Доказано, что полученная нелокальная граничная задача для эллиптического уравнения типа Трикоми имеет единственное решение, которое совпадает с объемным потенциалом в области определения оператора.

Ключевые слова: объемный потенциал, эллиптическое уравнение, фундаментальное решение, уравнение Трикоми.

Кілт сөздер: көлемдік потенциал, эллиптикалық теңдеу, іргелі шешім, Трикоми теңдеуі.

Keywords: volume potential, elliptic equation, fundamental solution, Tricomi equation.

Рассмотрим в области $\Omega \in R^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$ следующее уравнение Трикоми

$$Eu = y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad y > 0, \quad (1)$$

В области Ω рассмотрим объемный потенциал

$$u(x, y) = \iint_{\Omega} q(x, y; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi. \quad (2)$$

Здесь q – фундаментальное решение уравнения (1) в эллиптической полуплоскости, задаваемое выражением [1, стр. 155]

$$q(x, y; \tau, \xi) = k \frac{\mathfrak{H}^4 \mathfrak{U}}{\mathfrak{Z}^3 \mathfrak{U} \mathfrak{W}}^{4\beta-2} (r_1^2)^{-\beta} (1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma), \quad (3)$$

где F – гипергеометрическая функция, и

$$\left. \begin{array}{l} r^2 \\ r_1^2 \end{array} \right\} = (x-\tau)^2 + \frac{4}{9} \left(y^{\frac{3}{2}} \mp \xi^{\frac{3}{2}} \right)^2,$$

$$\sigma = \frac{r^2}{r_1^2}, \quad \beta = \frac{1}{6}, \quad k = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{4}{3} \right)^{2-2\beta} \frac{\Gamma^2(1-\beta)}{\Gamma(2-2\beta)}.$$

Т.е. q удовлетворяет следующему уравнению:

$$y \frac{\partial^2 q(x, y; \tau, \xi)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q(x, y; \tau, \xi)}{\partial y^2} = \delta(\varphi - \psi),$$

где $\varphi = (x, y)$, $\psi = (\tau, \xi)$, δ – дельта-функция Дирака.

Теорема 1. Для любой функции $f \in L_2(\Omega)$ объемный потенциал (2) и удовлетворяет гранич-ным условиям на $\partial\Omega$

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (4)$$

где q – фундаментальное решение уравнения (1) в эллиптической плоскости. Обратно, если реше-ние уравнения (1) из класса $w_2^2(\Omega)$ удовлетворяет граничным условиям (4), то оно определяет объемный потенциал по формуле (2).

Доказательство. Применяя к функции $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\partial\Omega)$ формулу Грина при любом $(x, y) \in \Omega$, получим равенство

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \iint_{\Omega} q(x, y; \tau, \xi) f(\tau, \xi) d\tau d\xi = \iint_{\Omega} q E u d\tau d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + \iint_{\Omega} u E q d\tau d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + u(x, y), \quad (x, y) \in \Omega, \end{aligned}$$

Отсюда вытекает тождество

$$\int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (5)$$

Из (5), по свойству потенциалов простого и двойного слоя согласно лемме Геллерстедта [1, стр. 155], при $(x, y) \rightarrow \partial\Omega$, находим

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (6)$$

Итак, равенство (6) является граничным условием объемного потенциала (2).

Далее, предельным переходом несложно показать, что формула (6) остается справедливой и для всех $u \in W_2^2(\Omega)$.

Обратно покажем, что если решение u_1 уравнения (1) удовлетворяет граничному условию (4), то оно совпадает с объемным потенциалом (1).

Действительно, если это не так, то функция $v = u - u_1 \in W_2^2(\Omega)$, где u – объемный потенциал (2), удовлетворяет однородному уравнению

$$Ev = y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

и однородному условию:

$$\frac{v(x, y)}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (4')$$

Применив формулу Грина к функции $v \in W_2^2(\Omega)$, как и выше, убеждаемся в том, что

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} q(x, y; \tau, \xi) E v \, d\tau d\xi = \iint_{\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + \iint_{\Omega} v E q \, d\tau d\xi = \\ &= \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x, y), \quad (x, y) \in \Omega. \end{aligned}$$

Т.е.

$$\int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (7)$$

Отсюда при $(x, y) \rightarrow \partial\Omega$, находим

$$0 = \frac{v(x, y)}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi v_\tau d\xi - v_\xi d\tau) - v(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) + v(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (8)$$

Так как функция v удовлетворяет условию (4'), то мы имеем из (8)

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega.$$

Подведем итоги:

$$y \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega. \quad (9)$$

$$v(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega. \quad (10)$$

Из единственности решения задачи Дирихле для уравнения (9) вытекает, что $v = u - u_1 \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega, \quad v = u - u_1 \equiv 0, \quad \forall (x, y) \in \Omega$, т.е. u_1 совпадает с объемным потенциалом (2).

Теорема 1 доказана.

Пример.

Рассмотрим одномерный потенциал в интервале $\Omega = (0, 1)$

$$u(x) = \int_0^1 \frac{1}{2} |x - y| f(y) dy, \quad (11)$$

Который удовлетворяет

$$u''(x) = f(x). \quad (12)$$

Требуется найти граничные условия для следующего одномерного потенциала

$$u''(x) = f(x), \quad x \in (0, 1), \quad (13)$$

фундаментальное решение которого выражается формулой [4, стр. 198]:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} |x|. \quad (14)$$

Решение. Подставляя значение $f(y)$, находим

$$\begin{aligned} u(x) &= \int_0^1 \frac{1}{2} |x - y| u''(y) dy = \int_0^x \frac{1}{2} |x - y| u''(y) dy - \int_x^1 \frac{1}{2} |x - y| u''(y) dy = \\ &= \frac{1}{2} [-xu'(0) + u(x) - u(0) - (x-1)u'(1) - u(1) + u(x)] = \\ &= u(x) - \frac{1}{2} [xu'(0) + u(0) + (x+1)u'(1) + u(1)] \end{aligned}$$

Следовательно, граничные условия объемного потенциала имеют следующий вид:

$$\begin{cases} u'(0) + u'(1) = 0, \\ -u'(1) + u(0) + u(1) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Следовательно, уравнение (13), где $u(x)$ определено по формуле (11) однозначно определяет граничные условия (15). С другой стороны, задача (13), (15) однозначно определяет объемный потенциал (11).

Заключение. Одной из самых сложных проблем математической физики является нахождение явного решения граничной задачи для любой области Евклидового пространства. Например, в случае классической граничной задачи для уравнения Трикоми мы можем найти ее решение в явном виде лишь для некоторых канонических областей Евклидового пространства. Новизна дан-ной работы состоит в том, что мы показали, что полученная новая граничная задача для уравнения Трикоми является разрешимой в явном виде. Из теоремы 1 сразу же следует, что если мы будем рассматривать следующую нелокальную граничную задачу для уравнения Трикоми в эллипти-ческой области:

$$y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad y > 0,$$

$$\frac{u}{2} + \int_{\partial\Omega} q(\xi u_\tau d\xi - u_\xi d\tau) - u(\xi q_\tau d\xi - q_\xi d\tau) = 0, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

то эта задача является разрешимой в явном виде для любой ограниченной области Евклидового пространства. Более того, фундаментальное решение данной задачи:

$$q(x, y; \tau, \xi) = k \frac{\text{жк}^4 \text{ц}^{4\beta-2}}{\text{и3} \text{ш}} (r_1^2)^{-\beta} (1-\sigma)^{1-2\beta} F(1-\beta, 1-\beta, 2-2\beta; 1-\sigma)$$

является ее функцией Грина для любой ограниченной области.

Авторы выражают благодарность своему учителю, д.ф.-м.н., профессору, академику НАН РК, ува-жаемому Т. Ш. Кальменову за постановку задачи и за постоянное внимание в процессе написания статьи.

ЛИТЕРАТУРА

- 1 Сураган Д., Несипбаев Е.Х. Граничные условия объемного потенциала для бигармонического уравнения // Извес-тия НАН РК. – 2013. – Т. 287, № 1. – С. 46-52.
- 2 Кальменов Т.Ш., Сураган Д. К спектральным вопросам объемного потенциала // Доклады Академии наук. – 2009. – Т. 428, № 1. – С. 16-19.
- 3 Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970.
- 4 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

REFERENCES

- 1 Kal'menov T.Sh., Suragan D. K spektral'nym voprosam ob'emnogo potenciala, Doklady akademii nauk, 2009, t. 428, №1, str. 16-19. (in Russ).

2 Suragan D., Nesipbaev E.H. Granichnye uslovija ob'emnogo potenciala dlja bigarmonicheskogo uravnenija, Izvestija NAN RK 2013, t. 287, № 1, -p.46-52. (in Russ)

3 Smirnov M.M. Uravnenija smeshannogo tipa, izd-vo Nauka, M., 1970 (in Russ).

4 Vladimirov V.S. Uravnenija matematicheskoi fiziki, izd-vo Nauka, M., 1981 (in Russ).

Резюме

Д. М. Жолтаев, А. Байқоныс, Г. Оралсын

¹ҚР БҒМ математика және математикалық үлгілеу институты, Алматы, Қазақстан Республикасы,

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан Республикасы)

ТРИКОМИ ТЕҢДЕУІ ҮШІН КӨЛЕМДІК ПОТЕНЦИАЛДЫҢ ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТАРЫ

[1] жұмыста кез-келген Ω облыс үшін Пуассон теңдеуі үшін көлемдік потенциалдың шекаралық шарт-тары табылған. [2] жұмыста бигармоникалық теңдеу үшін көлемдік потенциалдың шекаралық шарттары табылған, сонымен бірге алынған шекаралық есептің шешімі көлемдік потенциалмен дәл келетінін көрсе-тілген. Осы жұмыста Трикоми түрдегі азғындайтын эллиптикалық теңдеу зерттелген. Эллиптикалық облыста көлемдік потенциалдың шекаралық шарттары алынған. Трикоми теңдеуі үшін эллиптикалық облыста алынған локалды емес шекаралық есеп жалғыз шешімі болатындығы дәлелденген. Ол оператордың анықтау облысында көлемдік потенциалменен дәл келеді. Жұмыста алынған нәтижелердің көрнекілігі үшін мысал қарастырылады.

Кілт сөздер: көлемдік потенциал, эллиптикалық теңдеу, іргелі шешім, Трикоми теңдеуі.

Summary

D. M. Zholtayev, A. Baykonys, G. Oralsyn

(¹Institute of mathematics of the Ministry of Education And Science of The Republic of Kazakhstan, Almaty

²Al-Farabi Kazakh national university, Almaty, Republic of Kazakhstan)

BOUNDARY CONDITIONS OF THE VOLUME POTENTIAL FOR THE TRICOMI EQUATION

In the paper [1] the authors found boundary conditions of the volume potential for the Poisson equation in any bounded domain Ω of multidimensional Euclidean space. In work [2] it was found that boundary conditions of the volume potential for the bi-harmonic equation, also it was proved that the solution of obtained boundary-value problem coincides with the volume potential. In this paper we investigate Tricomi type degenerated elliptic equations. Boundary conditions for this equation in elliptic domain are obtained here. Also we show that the obtained non-local problem for the Tricomi degenerated elliptic equation has a unique solution which coincides with the volume potential in the definition domain of the operator. For the visualization we also consider an example.

Keywords: volume potential, elliptic equation, fundamental solution, Tricomi equation.

Поступила 25.06.2013 г.